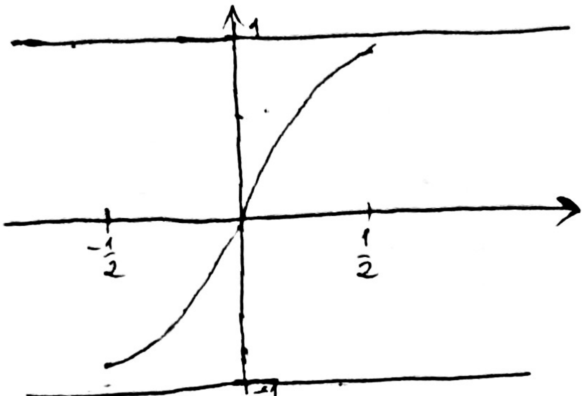
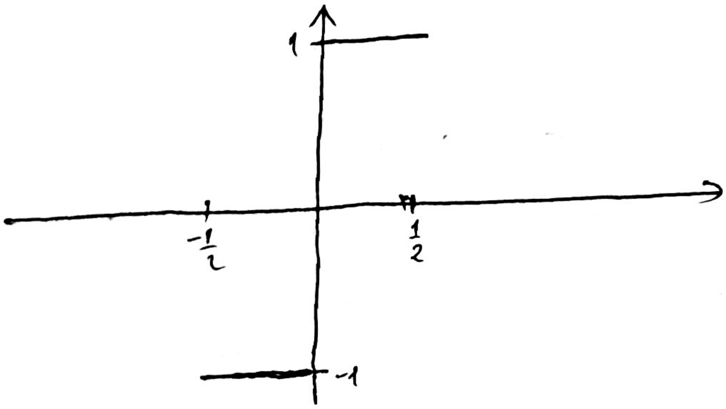
5. Функцију $f(x)=\operatorname{sgn}(\sin 2x)$ развити у Фуријеов ред на $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$

Рјешење:

График функције $\sin 2x$ на $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ је



Тада је график функције f



За периодично продужење ове функције важе Дирихлеови услови, па се оно може развити у Фуријеов ред. Функција f се поклапа са својим продужењем на $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$, па ће добијени ред бити и Фуријеов развој функције f на $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$. Означимо тај ред са F.

$$F(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos \frac{n\pi x}{l}+b_n \sin \frac{n\pi x}{l}\right)$$

$$l=\frac{\frac{1}{2}-\left(-\frac{1}{2}\right)}{2}=\frac{1}{2}$$

Израчунајмо коефицијенте $a_0, a_n, b_n, n\in\mathbb{N}$.

Како је функција f непарна, то је $a_0 = a_n = 0, \forall n$

$$b_n = \frac{1}{\frac{1}{2}} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(x) \sin \frac{n\pi x}{\ell}\, dx = 2 \cdot 2 \int_0^{\frac{1}{2}} \sin(2n\pi x)\, dx = 4 \cdot \left(\frac{-\cos 2n\pi x}{2n\pi} \right) \Big|_0^{\frac{1}{2}} =$$

$$= 4 \cdot \left(\frac{-\cos n\pi}{2n\pi} + \frac{1}{2n\pi} \right) = \frac{\overset{2}{\cancel{4}}\,(1-(-1)^n)}{2n\pi} = \frac{2(1-(-1)^n)}{n\pi}$$

За $n = 2k$, $b_n = 0$

За $n = 2k-1$, $b_n = \frac{4}{n\pi}$

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(1-(-1)^n)}{n\pi} \sin(2n\pi x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{(2k-1)\pi} \sin(2(2k-1)\pi x)$$

Фуријеов метод за рјешавање парцијалних диференцијалних једначина

Хиперболичке једначине

Разматрамо задатак

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t) \quad \text{на области} \quad \Omega = \{(x,t) \mid x \in [0,l], t \geq 0\}$$

$$a_1 u_x(0,t) + b_1 u(0,t) = \mu(t)$$

$$a_2 u_x(l,t) + b_2 u(l,t) = \nu(t)$$

$$a_k^2 + b_k^2 \neq 0, \quad k = 1,2$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x).$$

Смјеном

$$u(x,t) = v(x,t) + w(x,t)$$

$$w(x,t) = (\gamma_1 x^2 + \gamma_2 x + \gamma_3)\mu(t) + (\delta_1 x^2 + \delta_2 x + \delta_3)\nu(t)$$

задатак се своди на

$$v_{tt} = a^2 v_{xx} + F(x,t)$$

$$a_1 v_x(0,t) + b_1 v(0,t) = 0$$

$$a_2 v_x(l,t) + b_2 v(l,t) = 0$$

$$v(x,0) = \varphi_1(x), \quad v_t(x,0) = \psi_1(x)$$

гдје је

$$F(x,t) = f(x,t) - a^2 w_{xx} + w_{tt}$$

$$\varphi_1(x) = \varphi(x) - w(x,0), \quad \psi_1(x) = \psi(x) - w_t(x,0).$$

⌐ Коментар: Коефицијенте $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \delta_1, \delta_2, \delta_3$ бирамо тако да гранични услови новог задатка буду 0. ⌟

Даље, претпоставимо да је функција $v(x,t) = X(x)T(t)$. Једначина постаје

$$X(x)T''(t) = a^2 X''(x)T(t) + F(x,t)$$

$$a_1 X'(0) + b_1 X(0) = 0$$

$$a_2 X'(l) + b_2 X(l) = 0$$

$$X(x)T(0) = \varphi_1(x), \quad X(x)T'(0) = \psi_1(x)$$

Дале, постоји ортонормиран систем линеарно независних сопствених функција $X_k(x)$, $k=1,2,\dots$, задатка

$$X''+\lambda X=0$$
$$a_1X'(0)+b_1X(0)=0$$
$$a_2X'(l)+b_2X(l)=0$$

Представимо функције $F(x,t), \varphi_1(x), \psi_1(x)$ као редове облика

$$F(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} c_n(t)X_n(x)$$

$$\varphi_1(x)=\sum_{n=1}^{\infty} d_n X_n(x),\quad \psi_1(x)=\sum_{n=1}^{\infty} e_n X_n(x)$$

и тражимо рјешење нашег проблема које има облик

$$\vartheta(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)X_n(x)$$

Уврштавајући ово у једначине добијамо

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(T_n''(t)X_n(x)-a^2T_n(t)X_n''(x)\right)=\sum_{n=1}^{\infty} c_n(t)X_n(x)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}T_n(0)X_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty}d_nX_n(x),\quad \sum_{n=1}^{\infty}T_n'(0)X_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty}e_nX_n(x)$$

Пошто је $X_n''+\lambda_nX_n=0$, тј. $X_n''=-\lambda_nX_n$, имамо

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(T_n''(t)+a^2\lambda_nT_n(t)\right)X_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n(t)X_n(x)$$

Пошто је $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ линеарно независан систем, добијамо систем једначина:

$$T_n''(t)+a^2\lambda_nT_n(t)=c_n(t)$$
$$T_n(0)=d_n,\quad T_n'(0)=e_n$$

• Остаје још да нађемо рјешење добијеног система једначина, и рјешење нашег задатка ће бити

$$\vartheta(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) X_n(x)$$

$\overline{\text{VI}}$ вјежбе

Парцијалне диференцијалне једначине

1. Ријешити једначину

$u_{tt} = a^2 u_{xx}$, на $\Omega = \{(x,t) \mid 0 < x < 1,\ t > 0\}$, $a \neq 0$, уз услове

$u(0,t) = 0,\ u(1,t) = 0,\ t > 0$

$u(x,0) = f(x),\ u_t(x,0) = 0,\ 0 < x < 1$

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 1-x, & \frac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases}$$

Рјешење:

Претпоставимо да је $u(x,t) = X(x)T(t)$. Наш задатак постаје

$$X(x)T''(t) = a^2 X''(x)T(t)$$

$$X(0) = X(1) = 0$$

$$X(x)T(0) = f(x),\ T'(0) = 0$$

Даље је

$$\frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{a^2 X''(x)}{X(x)} = -\lambda$$

1° $\lambda < 0$

$$\frac{a^2 X''(x)}{X(x)} = -\lambda$$

$$a^2 X''(x) + \lambda X(x) = 0$$

Карактеристични полином је

$$a^2 k^2 + \lambda = 0$$

па је

$$k^2 = \frac{-\lambda}{a^2}$$

$$k = \pm\sqrt{\frac{-\lambda}{a^2}} = \pm\frac{\sqrt{-\lambda}}{a}$$

Дакле, рјешење ове диференцијалне једначине је облика

$$X(x) = c_1 e^{\frac{\sqrt{-\lambda}}{a}x} + c_2 e^{-\frac{\sqrt{-\lambda}}{a}x}$$

Сада ћемо искористити граничне услове да нађемо c_1 и c_2

$$X(0)=c_1+c_2=0 \Rightarrow c_2=-c_1$$

$$X(1)=c_1\left(e^{\frac{\sqrt{-\lambda}}{a}}-e^{-\frac{\sqrt{-\lambda}}{a}}\right)=0 \Rightarrow c_1=0$$

Дакле, $X(x)=0$ па је $u(x,t)=0$. X

2° $\lambda=0$

$$\frac{a^2X''(x)}{X(x)}=0$$

$$X''(x)=0$$

$$X(x)=ax+b$$

Користећи граничне услове добијамо

$$X(0)=b=0$$

$$X(1)=a=0$$

Дакле, $X(x)=0$, па је $u(x,t)=0$. X

3° $\lambda>0$

$$\frac{a^2X''(x)}{X(x)}=-\lambda$$

$$a^2X''(x)+\lambda X(x)=0$$

Карактеристични полином је

$$a^2k^2+\lambda=0$$

$$k^2=-\frac{\lambda}{a^2}$$

$$k=\pm i\frac{\sqrt{\lambda}}{a}$$

Дакле, опште рјешење једначине је задато са

$$X(x)=c_1\cos\frac{\sqrt{\lambda}}{a}x+c_2\sin\frac{\sqrt{\lambda}}{a}x$$

Користећи граничне услове добијамо

$$X(0)=c_1=0$$

$$X(1)=c_2 \sin \frac{\sqrt{\lambda}}{a}=0$$

Ако је $c_2=0$, тада је $X(x)=0$, па је $u(x,t)=0$, а ово рјешење не задовољава услов $u(x,0)=f(x)$.

Дакле, $c_2 \neq 0 \Rightarrow \sin \frac{\sqrt{\lambda}}{a^2}=0$

$$\frac{\sqrt{\lambda_n}}{a}=n\pi, \quad n\in N$$

$$\sqrt{\lambda_n}=an\pi$$

$$\lambda_n=a^2n^2\pi^2$$

Дакле, $X_n(x)=c_{2n}\sin n\pi x$ за $\lambda_n=a^2n^2\pi^2$.

Даље, тражимо $T_n(t)$ које задовољава једначину

$$\frac{T_n''(t)}{T_n(t)}=-\lambda_n=-a^2n^2\pi^2$$

$$T_n''(t)+\lambda_n T_n(t)=0$$

Карактеристични полином је

$$k^2+\lambda_n=0$$

$$k^2=-\lambda_n$$

$$k=\pm i\sqrt{\lambda_n}=\pm ian\pi$$

Опште рјешење ове једначине је

$$T_n(t)=d_{1n}\cos an\pi t+d_{2n}\sin an\pi t$$

$$T_n'(t)=-d_{1n}an\pi\sin an\pi t+d_{2n}an\pi\cos an\pi t$$

Користећи почетне услове добијамо

$$T_n'(0) = d_{2n}\, a n\pi = 0 \Rightarrow d_{2n} = 0, \forall n \in \mathbb{N}$$

Дакле, $T_n(t) = d_{1n} \cos a n\pi t$.

Решење задатка је облика

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_{2n} d_{1n} \cos a n\pi t \sin n\pi x$$

Означимо $c_{2n} d_{1n}$ са e_n, па је

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} e_n \cos a n\pi t \sin n\pi x$$

Како је

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} e_n \sin n\pi x = f(x) \quad (*)$$

коефицијенте e_n тражимо користећи Фуријеов развој ф-је f.

Из $(*)$ видимо да ф-ју f морамо развити у Фуријеов ред по "синусима" на $[0,1]$, па је морамо непарно продужити на $[-1,1]$. Дакле

$$F(x) = \begin{cases} 1-x, & \frac{1}{2} < x \le 1 \\ x, & 0 \le x \le \frac{1}{2} \\ x, & -\frac{1}{2} \le x < 0 \\ -1-x, & -1 \le x < -\frac{1}{2} \end{cases} = \begin{cases} 1-x, & \frac{1}{2} < x \le 1 \\ x, & -\frac{1}{2} \le x \le \frac{1}{2} \\ -1-x, & -1 \le x < -\frac{1}{2} \end{cases}$$

F - непарна ф-ја $\Rightarrow a_0, a_n = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$$l=1, \; b_n = \frac{1}{1} \int_{-1}^{1} F(x) \sin \frac{n\pi x}{1}\, dx = \int_{-1}^{1} F(x) \sin n\pi x\, dx =$$

$$= 2\int_0^1 F(x) \sin n\pi x\, dx = 2\left(\int_0^{\frac{1}{2}} x \sin n\pi x\, dx + \int_{\frac{1}{2}}^{1} (1-x) \sin n\pi x\, dx \right) \underset{(**)}{=}$$

$$\left[\int_0^{\frac12} x\sin n\pi x\,dx = \begin{matrix} u=x & d\vartheta=\sin n\pi x\,dx \\ du=dx & \vartheta=-\frac{\cos n\pi x}{n\pi}\end{matrix}\right] = -\frac{x\cos n\pi x}{n\pi}\Big|_0^{\frac12}+\frac{1}{n\pi}\int_0^{\frac12}\cos n\pi x\,dx$$

$$= -\frac12\frac{\cos\frac{n\pi}{2}}{n\pi}+\frac{1}{n\pi}\frac{\sin n\pi x}{n\pi}\Big|_0^{\frac12} = -\frac12\frac{\cos\frac{n\pi}{2}}{n\pi}+\frac{1}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2}$$

$$\int_{\frac12}^1 (1-x)\sin n\pi x\,dx = \int_{\frac12}^1 \sin n\pi x\,dx - \int_{\frac12}^1 x\sin n\pi x\,dx =$$

$$= \left[\begin{matrix} u=x & d\vartheta=\sin n\pi x\,dx \\ du=dx & \vartheta=-\frac{\cos n\pi x}{n\pi}\end{matrix}\right] = \frac{-\cos n\pi x}{n\pi}\Big|_{\frac12}^1 + \frac{x\cos n\pi x}{n\pi}\Big|_{\frac12}^1 - \frac{1}{n\pi}\int_{\frac12}^1\cos n\pi x\,dx =$$

$$= \cancel{\frac{-\cos n\pi}{n\pi}}+\frac{\cos\frac{n\pi}{2}}{n\pi}+\cancel{\frac{\cos n\pi}{n\pi}}-\frac{\frac12\cos\frac{n\pi}{2}}{n\pi}-\frac{1}{n\pi}\cdot\frac{\sin n\pi x}{n\pi}\Big|_{\frac12}^1 =$$

$$= \frac12\frac{\cos\frac{n\pi}{2}}{n\pi}+\frac{1}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2}$$

$$(**) = 2\cdot\left(-\frac12\cancel{\frac{\cos\frac{n\pi}{2}}{n\pi}}+\frac{1}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2}+\frac12\cancel{\frac{\cos\frac{n\pi}{2}}{n\pi}}+\frac{1}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2}\right) =$$

$$= \frac{4}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2}$$

Дакле

$$F(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2}\sin n\pi x \quad \text{на} \quad [-1,1] \text{ па је}$$

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2}\sin n\pi x \quad \text{на} \quad [0,1]$$

Добијамо

$$u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2}\sin n\pi x, \text{ па је } c_n=\frac{4}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2}$$

На крају је

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2}\sin n\pi x\cos an\pi t$$

рјешење нашег задатка